Reflexive Garben vom Rang r2 auf Pn

Okonek, C ; Spindler, H

DOI: https://doi.org/10.1515/crll.1983.344.38

Originally published at:
Okonek, C; Spindler, H (1983). Reflexive Garben vom Rang r2 auf Pn. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, 344:38-64.
DOI: https://doi.org/10.1515/crll.1983.344.38

Reflexive Garben vom Rang $r > 2$ auf $\mathbb{P}^n$

Von *Christian Okonek* und *Heinz Spindler* in Göttingen

§ 0. Einleitung

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathbb{P}_k^n$ der n-dimensionale projektive Raum über k. Eine kohärente Garbe F auf $\mathbb{P}_k^n$ heißt reflexiv [4], wenn der kanonische Morphismus $F \to F^{\vee\vee}$ in ihr Bidual ein Isomorphismus ist. Diese Garben verallgemeinern in natürlicher Weise die lokal freien Garben. Durch eine Reihe von Arbeiten sind die Eigenschaften reflexiver Garben vom Rang 2 untersucht worden (Barth/Elencwajg [1], Hartshorne [4], [5], Hartshorne/Hirschowitz [6], Okonek [9], [10]). Wesentlich weniger ist bekannt über reflexive Garben von höherem Rang. Neben den Arbeiten von Schneider [12], [13] und Spindler [15], [16], [17] ist vor allem die Arbeit [2] von Ein/Hartshorne/Vogelaar zu erwähnen, in der das Verhalten stabiler reflexiver Garben vom Rang 3 bei Einschränkung auf Hyperebenen vollständig behandelt wird.

Die vorliegende Arbeit führt diese Untersuchungen über reflexive Garben von höherem Rang weiter. Ist F eine reflexive Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}_k^n$, so gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_1, \ldots, a_s$; $r_1, \ldots, r_s$ mit $a_1 < a_2 < \cdots < a_s$, $r_i > 0$ und

$$F_L = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathcal{O}_L(a_i)^{\oplus r_i}$$

für generische Geraden $L \subset \mathbb{P}_k^n$. Das Zahlentupel

$$(\mathbf{a}; \mathbf{r}) := (a_1, \ldots, a_s; r_1, \ldots, r_s)$$

heißt der Spaltungstyp von F.

Sei E eine lokal freie Garbe beliebigen Ranges auf $\mathbb{P}_k^2$. Dann ist $\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} H^1(E(l))$ ein graduierter Modul über dem homogenen Koordinatenring $k[x_0, x_1, x_2]$ von $\mathbb{P}_k^2$. In § 1 untersuchen wir das Verhalten graduierter Unter- und Quotientenmoduln von $\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} H^1(E(l))$ in Abhängigkeit vom Spaltungstyp $(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ von E. Das Ergebnis (Theorem 1.1) ist analog zu dem entsprechenden Satz in [4], aber einfacher, da wir den Spaltungstyp festlegen, statt zu fordern, daß gewisse Schnitträume verschwinden. Als direkte Anwendung dieses Resultates auf $\mathbb{P}_k^2$ erhält man — in Abhängigkeit vom Spaltungstyp — Verschwindungssätze für lokal freie Garben beliebigen Ranges auf $\mathbb{P}_k^2$. Mit Standard-Argumenten bekommt man hieraus für reflexive Garben auf $\mathbb{P}_k^n$ analoge Verschwindungssätze (Theorem

2. 3—2. 4). Es wird sich später (§ 5) herausstellen, daß diese Sätze für stabile reflexive Garben vom Rang 3 scharf sind, falls der Grundkörper k Charakteristik 0 hat. In § 3 definieren wir für jede reflexive Garbe F vom Rang r auf $\mathbb{P}^3$ das Spektrum $k_F = (k_1, \ldots, k_m)$. Dieses Spektrum beschreibt in einem durch den Spaltungstyp $(\mathbf{a}, \mathbf{r})$ von F festgelegten Bereich die Kohomologiegruppen $H^1(F(l))$ und $H^2(F(l))$ (Theorem 3. 1.). Das so konstruierte Spektrum hat die üblichen Symmetrie- und Zusammenhangseigenschaften. Für die Länge m des Spektrums bekommt man nur eine Abschätzung.

Ist die Differenz $d(F) = a_s - a_1$ höchstens 2, so ist die Summe $\sum k_i$ der Zahlen im Spektrum festgelegt. Diese Eigenschaften erlauben es in geeigneten Fällen die möglichen Kohomologiegruppen gewisser Garben zu bestimmen. Dies wird in § 5 angewendet. Vorher geben wir in § 4 Abschätzungen für die dritte und vierte Chernklasse einer reflexiven Garbe mit gegebenem Spaltungstyp an. Der letzte Abschnitt — § 5 —, dient dazu, diejenigen stabilen reflexiven Garben vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^n_k$ zu bestimmen, für die die dritte Chernklasse maximal ist. Dazu müssen wir uns auf den Fall $\mathrm{Char}(k) = 0$ bebeschränken. Diese Garben bilden — bei festen Chernklassen — Modulräume ${}^3M^{st}_{\mathbb{P}^n}(c_1, c_2, \ldots)$, die wir untersuchen. Es stellt sich heraus, daß die Modulräume dieser extremen Garben stets irreduzibel sind. Für $n = 3$ liegen die lokal freien Garben dicht, während man für $n > 3$ keine lokal freien Garben mit maximaler dritter Chernklasse findet.

An einer anderen Stelle werden wir die hier begonnenen Untersuchungen fortführen. Insbesondere erlauben es die entwickelten Techniken, Modulräume stabiler reflexiver Garben vom Rang 3 mit kleinen Chernklassen zu beschreiben.

§ 1. *r*-Bündel auf $\mathbb{P}^2$

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathbb{P}^n = \mathrm{Proj}\, k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Für jede torsionsfreie kohärente Garbe F vom Rang r auf $\mathbb{P}^n$ gibt es [11] eindeutig bestimmte Zahlen $a_1, \ldots, a_s$, $r_1, \ldots, r_s$ mit $a_1 < \cdots < a_s$, $r_1, \ldots, r_s > 0$ und

$$F_L = \mathcal{O}_L(a_1)^{\oplus r_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_L(a_s)^{\oplus r_s}$$

für allgemeine Geraden $L \subset \mathbb{P}^n$. Das Tupel

$$(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = (a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s)$$

heißt der Spaltungstyp von F.

Sei nun E lokal frei vom Rang r auf $\mathbb{P}^2$ mit dem Spaltungstyp

$$(a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s).$$

Es gilt dann

$$(1) \qquad h^0(E(l)) \leqq \begin{cases} 0 & \text{für} \quad l \leqq -a_s - 1, \\ r_s & \text{für} \quad l \leqq -a_s. \end{cases}$$

Wir setzen

$$h_l(E) := h^0(E(l-1)) - h^0(E(l)) + h^0(E_L(l)),$$

wobei $L \subset \mathbb{P}^2$ eine allgemeine Gerade ist. Es gilt

$$(2) \qquad h_l(E) = \begin{cases} 0 & \text{für } \; l \leqq -a_s - 1, \\ r_s - h^0(E(-a_s)) & \text{für } \; l = -a_s. \end{cases}$$

Wir betrachten nun $M = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} H^1(E(l))$ als graduierten Modul über dem Polynomring $S = k[x_0, x_1, x_2]$.

Theorem 1. 1. *Sei E eine lokal freie Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^2$ mit Spaltungstyp $(a_1, \ldots, a_s; r_1, \ldots, r_s)$, N ein graduierter S-Untermodul in $M = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} H^1(E(l))$, R ein graduierter Quotientenmodul von M. Wir setzen $n_l := \dim_k N_l$, $r_l := \dim_k R_l$. Dann gilt*

i) $n_l \leqq n_{l+1} + h_{l+1}(E)$ *für alle* $l \in \mathbb{Z}$,

ii) $n_l \leqq n_{l+1}$ *für* $l \leqq -a_s - 2$,

iii) $n_l < n_{l+1}$ *für* $n_l \neq 0$, $l \leqq -a_s - 3$,

iv) *ist $n_l = n_{l+1} - 1$ für ein $l \leqq -a_s - 4$, so gibt es eine Linearform $x \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \setminus \{0\}$ mit $x \cdot N_{l'} = 0$ für alle $l' \leqq l$.*

i′) $r_{l+1} \leqq r_l + h_{-l-3}(E)$ *für alle* $l \in \mathbb{Z}$,

ii′) $r_{l+1} \leqq r_l$ *für* $l \geqq -a_1 - 2$,

iii′) $r_{l+1} < r_l$ *für* $r_{l+1} \neq 0$, $l \geqq -a_1 - 1$,

iv′) *ist $r_{l+1} = r_l - 1$ für ein $l \geqq -a_1$, so gibt es eine Linearform $x \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \setminus \{0\}$ mit $x \cdot R_{l'} = 0$ für alle $l' \geqq l$.*

Beweis. Sei $L_0 \subset \mathbb{P}^2$ eine allgemeine Gerade für E, $x_0 \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ eine Gleichung für L_0. Aus der Kohomologiesequenz zu der exakten Sequenz

$$(3) \qquad 0 \longrightarrow E(-1) \xrightarrow{\cdot x_0} E \longrightarrow E_{L_0} \longrightarrow 0$$

bekommt man die exakte Sequenz

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow H^0(E(l)) \longrightarrow H^0(E(l+1)) \longrightarrow H^0(E_{L_0}(l+1)) \longrightarrow H^1(E(l)) \xrightarrow{\cdot x_0} H^1(E(l+1)).$$

Nun ist N_l ein k-Untervektorraum von $H^1(E(l))$ und es gilt

$$\dim_k(\operatorname{Ker}(\cdot x_0 : H^1(E(l)) \longrightarrow H^1(E(l+1))) = h_{l+1}(E).$$

Dies liefert sofort die Formel

$$(5) \qquad n_l \leqq n_{l+1} + h_{l+1}(E).$$

Aus (2) entnimmt man dann

$$(6) \qquad n_l \leqq n_{l+1} \quad \text{für} \quad l \leqq -a_s - 2.$$

Damit sind i) und ii) gezeigt. Sei nun $n_l \neq 0$ für ein l. Wir betrachten die k-lineare Abbildung

$$\varphi_l \colon H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \otimes N_l \longrightarrow N_{l+1}.$$

Wenn $\varphi_l(x, -) \colon N_l \to N_{l+1}$ für alle Linearformen $x \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ injektiv ist, gilt — wegen des Bilinear Lemmas [4] —

$$(7) \qquad n_l \leqq n_{l+1} - 2.$$

Wir können zum Beweis von iii) also annehmen, daß eine Linearform x existiert, für die $\varphi_l(x, -)$ nicht injektiv ist. Sei L die zugehörige Gerade in $\mathbb{P}^2$. Wir erhalten die exakte Sequenz

$$(8) \qquad H^0(E(l+1)) \longrightarrow H^0(E_L(l+1)) \xrightarrow{\delta_l} H^1(E(l)) \xrightarrow{\cdot x} H^1(E(l+1)).$$

Nun setzen wir

$$N''_{l+1} := x \cdot N_l \subset H^1(E(l+1)), \quad n''_{l+1} = \dim_k N''_{l+1},$$

$$N'_{l+1} := \delta_l^{-1} N_l \subset H^0(E(l+1)), \quad n'_{l+1} = \dim_k N'_{l+1}.$$

Dann ist $N'' = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} N''_l$ ein graduierter S-Untermodul von M, es gilt daher nach (6)

$$(9) \qquad n''_{l+1} \leqq n''_{l+2} \quad \text{für} \quad l \leqq -a_s - 3.$$

Andererseits ist E_L eine direkte Summe von Geradenbündeln, $\bigoplus_l H^0(E_L(l))$ also ein freier $k[x_0, x_1, x_2]/(x)$-Modul. Als Untermodul ist $N' = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} N'_l$ daher torsionsfrei. Nach Voraussetzung gilt $n'_{l+1} \neq 0$; wendet man daher das Bilinear Lemma auf die lineare Abbildung

$$H^0(\mathcal{O}_L(1)) \otimes N'_{l+1} \longrightarrow N'_{l+2}$$

an, so bekommt man

$$(10) \qquad n'_{l+1} < n'_{l+2}.$$

Die Abbildung $\delta_l \colon H^0(E_L(l+1)) \to H^1(E(l))$ ist nach (1) für $l \leqq -a_s - 2$ injektiv, es folgt also für $l \leqq -a_s - 3$

$$(11) \qquad n_l = n''_{l+1} + n'_{l+1}, \quad n_{l+1} = n''_{l+2} + n'_{l+2}.$$

Aus den Formeln (9)—(11) bekommt man die Aussage iii). Ist schließlich für $l \leqq -a_s - 4\, n''_{l+1} \neq 0$, so folgt nach iii) (angewendet auf N'')

$$(12) \qquad n''_{l+1} < n''_{l+2},$$

also — mit den oben verwendeten Bezeichnungen —

$$(13) \qquad n_l \leqq n_{l+1} - 2.$$

Der Fall $n_l = n_{l+1} - 1$ kann also nur für $n''_{l+1} = 0$ auftreten. Nach i) folgt dann $N''_{l'+1} = 0$ für alle $l' \leqq l$, die Linearform x annulliert somit N_l, für $l' \leqq l$. Um die Aussagen i')—iv') zu beweisen, betrachtet man den zu R dualen Modul $R' = \mathrm{Hom}_k(R, k)$. R' ist ein graduierter Untermodul von M', und M' ist — wegen der Serre-Dualität — isomorph zu

$$\bigoplus_{l \in Z} H^1(E^\vee(-l-3)).$$

Damit bekommt man i')—iv') unmittelbar aus i)—iv) angewendet auf R'. Damit ist Theorem 1. 1 bewiesen.

§ 2. Verschwindungssätze für reflexive Garben auf $\mathbb{P}^n$

Für jede kohärente Garbe F auf $\mathbb{P}^n$ sind Chernklassen $c_1(F), \ldots, c_n(F)$ definiert [4], die sich als ganze Zahlen auffassen lassen. Wir schreiben im folgenden c_i statt $c_i(F)$, wenn klar ist, welche Chernklassen gemeint sind.

Lemma 2. 1. *Sei E eine lokal freie Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^2$ mit Spaltungstyp $(a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s)$, $a_1 \geqq -1$. Dann gilt*

$$(1) \qquad h^1(E(l)) = 0 \quad \textit{für} \quad l \geqq \max\left(c_2 - \frac{1}{2} c_1(c_1+3) - r + h^0(E),\ -a_1\right).$$

Beweis. Weil $a_1 \geqq -1$ ist, verschwindet $h^2(E)$, es gilt also

$$h^0(E) - \chi(E) = h^1(E).$$

Sei m die größte Zahl mit $h^1(E(m)) \neq 0$. Es sei $m \geqq -a_1$. Wir wenden nun Theorem 1. 1 auf den Quotientenmodul $R = M$ an und erhalten

$$(2) \qquad h^1(E) \geqq h^1(E(1)) + 1 \geqq \cdots \geqq h^1(E(m)) + m \geqq m + 1.$$

Die Riemann-Roch Formel auf $\mathbb{P}^2$ lautet

$$\chi(E) = r - c_2 + \frac{1}{2} c_1(c_1+3),$$

also

$$(3) \qquad m + 1 \leqq c_2 - \frac{1}{2} c_1(c_1+3) - r + h^0(E).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Lemma 2. 2. *Sei E eine lokal freie Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^2$ mit Spaltungstyp $(a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s)$, $a_s \leqq 1$. Dann gilt*

$$(4) \qquad h^1(E(l)) = 0 \quad \textit{für} \quad l \leqq \min\left(-c_2 - \frac{1}{2} c_1(3-c_1) - 3 + r - h^0(E^\vee),\ -a_s - 3\right).$$

Beweis. Man benutzt Serre-Dualität und wendet Lemma 2. 1 auf $E^\vee$ an.

Theorem 2. 3. *Sei F eine reflexive Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^n$, $n \geqq 2$ mit Spaltungstyp $(a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s)$, $a_1 \geqq -1$. Dann gilt*

$$(5) \quad h^{n-1}(F(l)) = 0 \quad \text{für} \quad l \geqq \max\left(c_2 - \frac{1}{2}c_1(c_1+3) - r - n + 2 + h^0(F_{\mathbb{P}^2}),\ -a_1 - n + 2\right),$$

wobei $F_{\mathbb{P}^2}$ die Einschränkung von F auf eine Ebene ist, die keine Singularitäten von F enthält.

Beweis. Dies folgt durch Induktion über n mit Hilfe von Serres Theorem B aus Lemma 2. 1.

Theorem 2. 4. *Sei F eine reflexive Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^n$, $n \geqq 2$, mit Spaltungstyp $(a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s)$, $a_s \leqq 1$. Dann gilt*

$$(6) \qquad h^1(F(l)) = 0 \quad \text{für} \quad l \leqq \min\left(-c_2 - \frac{1}{2}c_1(3-c_1) - 3 + r - h^0(F_{\mathbb{P}^2}{}^\vee),\ -a_s - 3\right),$$

wobei $F_{\mathbb{P}^2}$ die Einschränkung von F auf eine Ebene ist, die keine Singularitäten von F enthält.

Beweis. Für reflexive Garben gilt $h^1(F(n)) = 0$ für $n \ll 0$ [9]. Theorem 2. 4 folgt daher durch Induktion über n aus Lemma 2. 2.

§ 3. Spektrum reflexiver Garben auf $\mathbb{P}^3$

Für eine reflexive Garbe F vom Rang r auf $\mathbb{P}^3$ mit dem Spaltungstyp

$$(\mathbf{a}, \mathbf{r}) = (a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s)$$

setzen wir

$$(1) \qquad d(F) := a_s - a_1.$$

Theorem 3. 1. *Sei F eine reflexive Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^3$ mit dem Spaltungstyp $(a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s)$. Es gibt genau ein Tupel*

$$k_F = (k_1, \ldots, k_m)$$

ganzer Zahlen mit

$$k_1 \leqq k_2 \leqq \cdots k_{m'} \leqq a_1 \leqq a_s \leqq k_{m'+1} \leqq \cdots \leqq k_m,$$

für die gilt:

i) $$h^1(F(l)) = h^0\left(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i + l + 1)\right) \quad \text{für} \quad l \leqq -a_s - 1,$$

ii) $$h^2(F(l)) = h^1\left(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i + l + 1)\right) \quad \text{für} \quad l \geqq -a_1 - 3.$$

Beweis. Wir wählen eine Ebene $H \subset \mathbb{P}^3$, auf der $E := F_H$ singularitätenfrei ist und den Spaltungstyp $(a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s)$ hat. Sei $h \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$ eine Gleichung für H. Wir betrachten $M := \bigoplus_l H^1(E(l))$ und definieren einen graduierten Untermodul N durch

$$N_l := \operatorname{Im}\left(H^1(F(l)) \xrightarrow{\operatorname{res}_H} H^1(E(l))\right). \tag{2}$$

Einen graduierten Quotientenmodul R erklären wir durch

$$R_l = \operatorname{Ker}\left(H^2(F(l-1)) \xrightarrow{\cdot h} H^2(F(l))\right), \tag{3}$$

und setzen $n_l = \dim_k N_l$, $r_l = \dim_k R_l$. Nun ist $h^0(E(l)) = 0$ für $l \leqq -a_s - 1$, also

$$n_l = h^1(F(l)) - h^1(F(l-1)) \quad \text{für} \quad l \leqq -a_s - 1. \tag{4}$$

Die Bedingung i) bedeutet nun

$$h^1(F(l)) = \sum_{k_i \geqq -l-1} (k_i + l + 2) \quad \text{für} \quad l \leqq -a_s - 1, \tag{5}$$

also

$$n_l = \sum_{k_i \geqq -l-1} 1. \tag{6}$$

Es muß also gelten

$$n_l - n_{l-1} = \sum_{k_i = -l-1} 1 = \#\{i \mid k_i = -l-1\} \quad \text{für} \quad l \leqq -a_s - 1. \tag{7}$$

Nach Theorem 1. 1 gilt aber $n_l - n_{l-1} \geqq 0$ für $l \leqq -a_s - 1$, man kann also Zahlen $k_i \geqq a_s$ festlegen durch

$$\#\{i \mid k_i = -l-1\} = n_l - n_{l-1} \quad \text{für} \quad l \leqq -a_s - 1.$$

Um die Zahlen $k_i \leqq a_1$ zu bestimmen, geht man analog vor: Bedingung ii) bedeutet

$$h^2(F(l)) = \sum_{k_i \leqq -l-3} (-k_i - l - 2) \quad \text{für} \quad l \geqq -a_1 - 3. \tag{8}$$

Da $h^2(E(l+1)) = h^0(E^\vee(-l-4)) = 0$ ist für $l \geqq -a_1 - 3$, gilt in diesem Bereich

$$r_{l+1} = h^2(F(l)) - h^2(F(l+1)) \quad \text{für} \quad l \geqq -a_1 - 3. \tag{9}$$

Man bekommt daher die Bedingung

$$r_{l+1} - r_{l+2} = \sum_{k_i = -l-3} 1 = \#\{i \mid k_i = -l-3\} \quad \text{für} \quad l \geqq -a_1 - 3. \tag{10}$$

Wiederum nach Theorem 1. 1 sind die Differenzen $r_{l+1} - r_{l+2} \geqq 0$ für $l \leqq -a_1 - 3$, so daß durch (10) eindeutig Zahlen $k_i \leqq a_1$ festgelegt werden.

Es bleibt noch zu zeigen, daß für $a_1 = a_s$ die Formeln (7) und (10) das gleiche Ergebnis liefern; es ist also zu zeigen, daß

(11) $$r_{-a_1-2} - r_{-a_1-1} = n_{-a_s-1} - n_{-a_s} - 2$$

gilt, falls $a_1 = a_s$ ist. Dies folgt aus

(12) $$r_{-a_1-2} + n_{-a_s-2} = r_{-a_1-2} + n_{-a_1-2} = h^1(E(-a_1-2)),$$

(13) $$r_{-a_1-1} + n_{-a_s-1} = r_{-a_1-1} + n_{-a_1-1} = h^1(E(-a_1-1))$$

und aus dem Satz von Riemann-Roch:

(14) $$h^1(E(-a_1-2)) = c_2(E(-a_1)) = h^1(E(-a_1-1)).$$

Damit ist Theorem 3. 1 bewiesen.

Wir nennen das durch diesen Satz definierte Tupel $k_F = (k_1, \ldots, k_m)$ das *Spektrum* von F. Seine Eigenschaften sollen nun untersucht werden.

Lemma 3. 2. *Sei F eine lokal freie Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^2$ mit Spaltungstyp $(a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s)$ und Spektrum $k_F = (k_1, \ldots, k_m)$; sei $k_{F^\vee} = (k_1^\vee, \ldots, k_{m^\vee}^\vee)$ das Spektrum von $F^\vee$. Dann gilt $m = m^\vee$ und*

(15) $$(k_1^\vee, \ldots, k_m^\vee) = (-k_m, \ldots, -k_1).$$

Beweis. $F^\vee$ hat den Spaltungstyp $(-a_s, \ldots, -a_1;\ r_s, \ldots, r_1)$. Nach (4) gilt für $l \leqq -a_s - 1$.

$$n_l = h^1(F(l)) - h^1(F(l-1)).$$

Nun ist $h^1(F(l)) = h^2(F^\vee(-l-4))$, also

(16) $$n_l = h^2(F^\vee(-l-4)) - h^2(F^\vee(-l-3)).$$

Wir bezeichnen die entsprechenden zu $F^\vee$ gehörigen Dimensionszahlen mit $n_l^\vee$ und $r_l^\vee$. Nach (9) gilt dann für $l \leqq -a_s - 1$

(17) $$n_l = r_{-l-3}^\vee,$$

also

(18) $$n_l - n_{l-1} = r_{-l-3}^\vee - r_{-l-2}^\vee.$$

Dies bedeutet

$$\#\{i \mid k_i = -l-1\} = \#\{j \mid k_j^\vee = l+1\} \quad \text{für} \quad l \leqq -a_s - 1.$$

Analog bekommt man die Gleichung

$$\#\{i \mid k_i = -l-3\} = \#\{j \mid k_j^\vee = l+3\} \quad \text{für} \quad l \geqq -a_1 - 3.$$

Dies liefert die Behauptung.

Proposition 3. 3. *Sei F eine reflexive Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^3$ mit Spaltungstyp $(a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s)$ und Spektrum $k_F = (k_1, \ldots, k_m)$.*

i) *Gibt es ein $k_i \leqq a_1 - 1$, so kommen auch alle Zahlen zwischen k_i und $a_1 - 1$ im Spektrum vor.*

ii) *Gibt es ein $k_i \geqq a_s + 1$, so kommen auch alle Zahlen zwischen $a_s + 1$ und k_i im Spektrum vor.*

Beweis. Wir verwenden die Bezeichnungen von Theorem 3. 1.

i) Wenn im Spektrum die Zahl $k \leqq a_1 - 1$ auftritt, gilt nach (10)

$$r_{-k-2} > r_{-k-1}.$$

Nach Theorem 1. 1 iii′) gilt dann

$$r_{-k-1} < r_{-k-2} < \cdots < r_{-a_1-1}, \tag{19}$$

es kommen also dann auch alle Zahlen zwischen k und $a_1 - 1$ vor.

ii) Wenn im Spektrum die Zahl $k \geqq a_s + 1$ auftritt, gilt nach (7)

$$n_{-k-1} > n_{-k-2}.$$

Aus Theorem 1. 1 iii) erhält man dann

$$n_{-k-2} < n_{-k-1} < \cdots < n_{-a_s-2}, \tag{20}$$

es kommen also auch alle Zahlen zwischen $a_s + 1$ und k vor.

Lemma 3. 4. *Sei F eine reflexive Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^3$ mit Spaltungstyp $(a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s)$ und Spektrum $k_F = (k_1, \ldots, k_m)$. Sei H eine Ebene, die eine generische Gerade L enthält. Dann gilt*

$$m \leqq -\chi\big(F_H(-a_1-2)\big) + \sum_{l=-a_s}^{-a_1-2} h^0\big(F_L(l)\big) \quad \text{für} \quad a_s - a_1 \geqq 2, \tag{21}$$

$$m = \begin{cases} -\chi\big(F_H(-a_1-2)\big) & \text{für} \quad a_s - a_1 = 1, \\ -\chi\big(F_H(-a_1-1)\big) & \text{für} \quad a_s - a_1 = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Beweis. Aus den Formeln (6) und (9) erhält man

$$\#\{i \mid k_i \geqq a_s\} = n_{-a_s-1}, \tag{23}$$

$$\#\{i \mid k_i \leqq a_1\} = r_{-a_1-2}. \tag{24}$$

Wir setzen $d = a_s - a_1$. Sei zunächst $d \geqq 2$. Dann gilt

$$m = n_{-a_s-1} + r_{-a_1-2} = n_{-a_1-d-1} + r_{-a_1-2}.$$

Wir wenden nun Theorem 1. 1 i) an, um n_{-a_1-d-1} abzuschätzen, und erhalten — mit den dort eingeführten Bezeichnungen —

$$n_{-a_1-d-1} \leqq n_{-a_1-2} + \sum_{l=-a_1-d}^{-a_1-2} h_l(F_H),$$

also

$$(25)\quad m \leqq n_{-a_1-2} + r_{-a_1-2} + \sum_{l=-a_1-d}^{-a_1-2} h_l(F_H)$$

$$= h^1\big(F_H(-a_1-2)\big) + \sum_{l=-a_1-d}^{-a_1-2} \big(h^0\big(F_H(l-1)\big) - h^0\big(F_H(l)\big) + h^0\big(F_L(l)\big)\big)$$

$$= -\chi\big(F_H(-a_1-2)\big) + \sum_{l=-a_s}^{-a_1-2} h^0\big(F_L(l)\big).$$

Sei nun $d=1$, also $a_1+1=a_s$. Dann ist

$$m = n_{-a_s-1} + r_{-a_1-2} = h^1\big(F_H(-a_1-2)\big) = -\chi\big(F_H(-a_1-2)\big).$$

Für $d=0$ schließlich bekommt man

$$m = n_{-a_s-1} + r_{-a_1-1} = h^1\big(F_H(-a_1-1)\big) = -\chi\big(F_H(-a_1-1)\big).$$

Lemma 3. 5. *Sei F eine reflexive Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^3$ mit Spaltungstyp $(a_1,\ldots,a_s;\ r_1,\ldots,r_s)$ und Spektrum $k_F=(k_1,\ldots,k_m)$. Falls $a_s-a_1 \leqq 2$ ist, gilt*

$$(26)\qquad \sum_{i=1}^{m} k_i = m(a_s-1) - \chi\big(F(-a_s-1)\big).$$

Beweis. Sei H eine Ebene wie im Beweis von Theorem 3. 1, $E=F_H$. Es gilt dann $h^0\big(E(-a_s-1)\big)=0$ und $h^0\big(E^\vee(a_1-1)\big)=0$. Daher ist auch $h^0\big(F(-a_s-1)\big)=0$. Außerdem gilt $h^3\big(F(-a_s-1)\big)=h^0\big(F^\vee(a_s-3)\big)\leqq h^0\big(F^\vee(a_1-1)\big)$, da nach Voraussetzung $a_1\leqq a_s-2$ ist. Also ist auch $h^3\big(F(-a_s-1)\big)=0$ und wir bekommen

$$-\chi\big(F(-a_s-1)\big) = h^1\big(F(-a_s-1)\big) - h^2\big(F(-a_s-1)\big)$$

$$= \sum_{k_i \geqq a_s} (k_i - a_s + 1) - \sum_{k_i \geqq a_s - 1} (-k_i + a_s - 1)$$

$$= \sum k_i + m(1-a_s).$$

Bemerkung 3. 6. Aus Proposition 3. 3 und Lemma 3. 4 bekommt man Verschwindungssätze für Kohomologiegruppen reflexiver Garben mit festem Spaltungstyp und fester zweiter Chernklasse. Sei etwa F eine reflexive Garbe wie in Lemma 3. 4. Die rechten Seiten in den Ungleichungen (21) und den Gleichungen (22) hängen nur vom Spaltungstyp von F und von $c_2(F)$ ab. Wir bezeichnen sie mit M. Es gilt dann

$$(27)\qquad h^1\big(F(l)\big)=0 \quad \text{für} \quad l < -a_s-1-M,$$

$$(28)\qquad h^2\big(F(l)\big)=0 \quad \text{für} \quad l > -a_1-3+M.$$

§ 4. Abschätzungen für die Chernklassen c_3 und c_4

In diesem Abschnitt geben wir Abschätzungen für die dritte und vierte Chernklasse einer reflexiven Garbe vom Rang r an, die als Spezialfälle die Abschätzungen in [2] enthalten.

Theorem 4. 1. *Sei F eine reflexive Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^3$ mit Spaltungstyp $(a_1, \ldots, a_s;\ r_1, \ldots, r_s)$; es gelte $a_1 \geqq -1$. Ist $H \subset \mathbb{P}^3$ eine generische Ebene für F, so gilt für die Chernklassen $c_i = c_i(F)$ die Abschätzung*

$$(1) \qquad c_2 \geqq r + \frac{1}{2} c_1(c_1+3) - h^0(F_H),$$

$$(2) \qquad c_3 \leqq 4c_2 + c_1 c_2 + 2 - 2r - 2\binom{c_1+3}{3} + \left(c_2 - r - \frac{1}{2} c_1(c_1+3)\right)\left(c_2 - r - 1 - \frac{1}{2} c_1(c_1+3)\right) + 2h^0(F) + h^0(F_H)\left(h^0(F_H) + 2c_2 - 2r - 1 - c_1(c_1+3)\right).$$

Beweis. Weil $a_1 \geqq -1$ ist, gilt $h^2(F_H) = 0$, also

$$c_2 - r - \frac{1}{2} c_1(c_1+3) + h^0(F_H) = h^1(F_H) \geqq 0.$$

Dies liefert die Ungleichung für c_2. Aus der Kohomologiesequenz zu

$$0 \longrightarrow F(-1) \longrightarrow F \longrightarrow F_H \longrightarrow 0$$

erhält man die Ungleichungen

$$(3) \qquad h^2(F(l)) \leqq h^2(F(l+1)) + h^1(F_H(l+1)).$$

Nach Theorem B ist $h^2(F(l+1)) = 0$ für $l \gg 0$, wir bekommen daher die Abschätzung

$$(4) \qquad \chi(F) \leqq h^0(F) + h^2(F) \leqq h^0(F) + \sum_{l \geqq 1} h^1(F_H(l)).$$

Nun wenden wir Theorem 1. 1 iii') an und erhalten — wie im Beweis von Lemma 2. 1 —

$$(5) \qquad h^1(F_H(l)) \leqq h^1(F_H) - l \quad \text{für} \quad l \geqq 0 \quad \text{und} \quad h^1(F_H(l)) \neq 0.$$

Aus (4) und (5) bekommt man

$$(6) \qquad \chi(F) \leqq h^0(F) + \frac{h^1(F_H)\left(h^1(F_H) - 1\right)}{2}.$$

Setzt man nun für $\chi(F)$ die Riemann-Roch Formel ein, so entsteht — nach Auflösung nach c_3 — die Abschätzung für die dritte Chernklasse.

Bemerkung 4. 2. Ist c_3 — bei gegebenem $c_1, c_2, h^0(F)$ und $h^0(F_H)$ — maximal, gilt also in (6) Gleichheit, so muß auch in (4) und für $l \geqq 0$ in den Ungleichungen (3) und (5) Gleichheit gelten. Ist m die größte Zahl mit $h^1(F_H(m)) \neq 0$, so bekommt man, falls $m \geqq 2$ ist

$$h^2(F(m))=0, \quad h^2(F(m-1))=1, \quad h^2(F(m-2))=3,$$

mit $m=h^1(F_H)-1=c_2-r-1-\frac{1}{2}c_1(c_1+3)+h^0(F_H)$.

Ist $m=1$, so erhält man $h^1(F(1))=0$, $h^2(F)=1$, $h^2(F(-1))\leqq 3$. Ist $m=0$, so folgt nur $h^2(F)=0$, $h^2(F(-1))\leqq 1$.

Diese Bemerkung werden wir später anwenden.

Um die vierte Chernklasse einer reflexiven Garbe F auf $\mathbb{P}^4$ abzuschätzen, betrachten wir das Spektrum $k_{F_H}=(k_1,\ldots,k_m)$ der Einschränkung von F auf eine generische Hyperebene $H \subset \mathbb{P}^4$.

Lemma 4. 3. *Sei F eine reflexive Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^4$ mit Spaltungstyp $(a_1,\ldots,a_s;\ r_1,\ldots,r_s)$ und $k_{F_H}=(k_1,\ldots,k_m)$. Es gelte $-3\leqq a_1 \leqq a_s \leqq 0$. Dann folgt für die Chernklassen $c_i=c_i(F)$*

$$(7) \qquad c_4 \leqq 6\sum_{i=1}^{m}\binom{k_i+2}{2}+\frac{1}{2}\Big[(9+2c_1)\,c_3+c_2^2 -(2c_1^2+9c_1+11)c_2+\frac{1}{2}(c_1^3+6c_1^2+11c_1+6)\,c_1\Big].$$

Beweis. Es gilt

$$(8) \qquad -\chi(F(-1))\leqq h^1(F(-1))+h^3(F(-1)).$$

Aus der Kohomologiesequenz zu

$$0 \longrightarrow F(-1) \longrightarrow F \longrightarrow F_H \longrightarrow 0$$

bekommt man die Ungleichungen

$$(9) \qquad h^1(F(l))\leqq h^1(F(l-1))+h^1(F_H(l)),$$

$$(10) \qquad h^3(F(l))\leqq h^3(F(l+1))+h^2(F_H(l+1)).$$

Weil F reflexiv ist, gilt $h^1(F(l-1))=0$ für $l \ll 0$. Nach Theorem B ist $h^3(F(l+1))=0$ für $l \gg 0$. Man erhält daher die Abschätzung

$$(11) \qquad -\chi(F(-1))\leqq \sum_{l\leqq -1} h^1(F_H(l))+\sum_{l\geqq 0} h^2(F_H(l)).$$

Da nach Voraussetzung $-3 \leqq a_1 \leqq a_s \leqq 0$ ist, können wir Theorem 3. 1 anwenden und bekommen

$$
\begin{aligned}
(12) \qquad -\chi(F(-1) &\leqq h^1(F(-1)) + h^3(F(-1)) \\
&\leqq \sum_{l \leqq -1} h^0\left(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i+l+1)\right) + \sum_{l \geqq 0} h^1\left(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_i+l+1)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{l \geqq 0} \max(0, k_i - l + 1) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{l \geqq 0} \max(0, -k_i - l - 2) \\
&= \sum_{k_i+1 \geqq 0} \sum_{l=0}^{k_i+1} (k_i - l + 1) + \sum_{k_i+2 \leqq 0} \sum_{l=0}^{-k_i-2} (-k_i + l - 2) \\
&= \sum_{k_i+1 \geqq 0} \binom{k_i+2}{2} + \sum_{k_i+2 \leqq 0} \binom{-k_i-1}{2} = \sum_{i=1}^{m} \binom{k_i+2}{2}.
\end{aligned}
$$

Die Riemann-Roch Formel lautet

$$
\begin{aligned}
(13) \qquad -\chi(F(-1)) = \frac{-1}{24} [&-4c_4 + (18 + 4c_1) c_3 + 2c_2^2 - (4c_1^2 + 18c_1 + 22) c_2 \\
&+ (c_1^3 + 6c_1^2 + 11c_1 + 6) c_1].
\end{aligned}
$$

Setzt man dies in (12) ein, so bekommt man durch Auflösung nach c_4 die Ungleichung (7).

Bemerkung 4. 4. Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von 4. 3 noch $d(F) = a_s - a_1 \leqq 2$, dann wird die rechte Seite der Ungleichung (7) maximal für das Spektrum $(k_1, \ldots, k_m) = (a_1 - m, \ldots, a_1 - 1)$. Für dieses Spektrum gilt

$$
(14) \qquad \sum_{i=1}^{m} \binom{k_i+2}{2} = \begin{cases} \binom{m-a_1}{3} & \text{für } -2 \leqq a_1 \leqq 0, \\ \binom{m-a_1}{3} - 1 & \text{für } a_1 = -3. \end{cases}
$$

§ 5. Klassifikation extremer Garben vom Rang 3

Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, daß der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen mit Charakteristik 0 ist. Ist F dann eine normierte, semistabile reflexive Garbe vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^3$, $L \subset \mathbb{P}^3$ eine allgemeine Gerade, so gilt nach dem Satz von Grauert-Mülich-Spindler [14]

$$
(1) \qquad F_L \cong \begin{cases} \mathcal{O}_L(-1)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_L & \text{für } c_1 = -2, \\ \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L^{\oplus 2} & \text{für } c_1 = -1, \\ \mathcal{O}_L^{\oplus 3} \text{ oder } \mathcal{O}_L(-1) \oplus \mathcal{O}_L(1) \oplus \mathcal{O}_L & \text{für } c_1 = 0. \end{cases}
$$

Wir können daher die Abschätzungen für die dritte Chernklasse anwenden. Wenn wir voraussetzen, daß F stabil ist, gilt (vgl. [2], [13], [15]) für $c_i = c_i(F)$

$$(2) \qquad c_3 \leqq \begin{cases} c_2^2 - 3c_2 + 2 & \text{für } \ c_1 = -2, \\ c_2^2 - 2c_2 + 2 & \text{für } \ c_1 = -1, \\ c_2^2 - c_2 & \text{für } \ c_1 = 0. \end{cases}$$

Hier haben wir die Einschränkungssätze aus [2] benutzt. Wenn $c_1 = 0$ ist, und die Einschränkung F_H auf eine generische Ebene stabil ist, gilt sogar die schärfere Abschätzung [2]

$$(3) \qquad c_3 \leqq c_2^2 - 3c_2 + 6.$$

In diesem Abschnitt sollen die stabilen reflexiven Garben vom Rang 3 klassifiziert werden, für die c_3 extrem ist.

Lemma 5. 1. *Sei F eine semistabile reflexive Garbe vom Rang* 3 *auf* $\mathbb{P}^n$, $n \geqq 2$, *mit* $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. *Dann gilt* $F \cong \mathcal{O}^{\oplus 3}$.

Beweis. Ist F eine solche Garbe, so ist nach [13] die Einschränkung $F_{\mathbb{P}^2}$ auf eine generische Ebene $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}$ semistabil. Da $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$ gilt, ergibt sich für $F_{\mathbb{P}^2}$ folgende Kohomologie:

$$\begin{array}{ccc|l} & & & \uparrow q \\ 0 & 0 & 0 & h^q(F_{\mathbb{P}^2}(p)) \\ 0 & 0 & s & \\ 0 & 0 & 3+s & \\ \hline & & & \rightarrow p \end{array}$$

Aus dem Satz von Beilinson [11] folgt $s = 0$ und $F_{\mathbb{P}^2} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3}$. Durch Einschränken auf generische Hyperebenen folgt nun

$$h^1(F(*)) = h^2(F(*)) = \cdots = h^{n-1}(F(*)).$$

Mit Hilfe des Satzes von Beilinson erhält man dann die Behauptung.

Theorem 5. 2. *Zu jeder ganzen Zahl $d \geqq 3$ gibt es eine stabile reflexive Garbe F vom Rang* 3 *auf* $\mathbb{P}^3$ *mit den Chernklassen* $c_1 = -2$, $c_2 = d$, $c_3 = d^2 - 3d + 2$. *Der Modulraum* ${}^3M^{st}_{\mathbb{P}^3}(-2, d, d^2 - 3d + 2)$ *dieser Garben ist irreduzibel, glatt und rational. Die lokal freien Garben liegen in diesem Modulraum dicht.*

Beweis. Nach [2] ist die Einschränkung auf eine generische Ebene stabil, die dritte Chernklasse $c_3 = d^2 - 3d + 2$ also maximal. Nach Bemerkung 4. 2 gilt daher für $d \geqq 5$

$$h^2(F(d-3)) = 0, \quad h^2(F(d-4)) = 1, \quad h^2(F(d-5)) = 3.$$

Für $d = 3$ bzw. $d = 4$ ist dies auch richtig, da F dann notwendig das Spektrum $k_F = (-2, -1)$ bzw. $k_F = (-3, -2, -1)$ haben muß (siehe § 3 und Bemerkung 4. 2.).

Das Bilinear Lemma [4] zeigt, daß es eine instabile Ebene H [4] der Ordnung $r=d-1$ gibt. Der Reduktionsschnitt [4] führt auf eine exakte Sequenz

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow F'(-1) \longrightarrow F \longrightarrow \mathscr{I}_{Z,H}(1-d) \longrightarrow 0,$$

wobei F' reflexiv vom Rang 3 mit Chernpolynom

$$c_t(F') = 1 + 2\,l(\mathcal{O}_Z)\,t^3$$

ist. Weil $h^0(F)=0$ ist, folgt $h^0(F'(-1))=0$. Wir dualisieren nun die Sequenz (4) und erhalten

$$(5) \qquad 0 \longrightarrow F^\vee \longrightarrow F'^\vee(1) \longrightarrow \mathcal{O}_H(d) \longrightarrow \mathscr{E}xt^1(F, \mathcal{O}) \longrightarrow \cdots.$$

Der Morphismus $F'^\vee(1) \to \mathcal{O}_H(d)$ faktorisiert über $F_H'^\vee(1)$, es folgt

$$F'^\vee \subset F^\vee.$$

Insbesondere gilt $h^0(F'^\vee(-1)) = h^0(F^\vee(-1)) = 0$, F' ist also semistabil. Aus Lemma 5.1 folgt deshalb

$$F' \cong \mathcal{O}^{\oplus 3},$$

also $Z=\emptyset$. Tensoriert man (5) mit $\mathcal{O}(-1)$, so erhält man

$$(6) \qquad 0 \longrightarrow F^\vee(-1) \longrightarrow \mathcal{O}^{\oplus 3} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_H(d-1) \longrightarrow \mathscr{E}xt^1(F, \mathcal{O})(-1) \longrightarrow 0,$$

$F^\vee(-1)$ ist also gegeben als Kern eines Morphismus

$$(7) \qquad \alpha : \mathcal{O}^{\oplus 3} \longrightarrow \mathcal{O}_H(d-1).$$

Der Morphismus α hat einen Cokern endlicher Länge und es gilt $\operatorname{Ker}(H^0(\alpha))=0$. Ist umgekehrt ein Morphismus $\alpha : \mathcal{O}^{\oplus 3} \to \mathcal{O}_H(d-1)$ mit einem Cokern endlicher Länge und injektivem $H^0(\alpha)$ gegeben, so wird durch

$$F_\alpha := (\operatorname{Ker}\alpha)^\vee(-1)$$

eine stabile reflexive Garbe mit den gewünschten Chernklassen definiert. Genau dann ist F_α lokal frei, wenn α surjektiv ist.

Die instabile Ebene von F ist eindeutig bestimmt ($d>2$) als diejenige Ebene, in der alle Geraden Sprunggeraden sind. Daher können wir den Modulraum

$${}^3M^{st}_{\mathbb{P}^3}(-2, d, d^2-3d+2)$$

folgendermaßen global beschreiben ($d>2$):

Wir betrachten die Inzidenzkorrespondenz

$$X = \{(x, h) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{3\vee} \mid h(x)=0\}.$$

Die kanonischen Projektionen liefern das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}^{3\vee} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ \mathbb{P}^3 & & \end{array}.$$

Das Bündel $q_* p^* \mathcal{O}(d-1)$ hat über dem Punkt $h \in \mathbb{P}^3$ die Faser $H^0(\mathcal{O}_H(d-1))$, wobei H die Ebene mit der Gleichung $h=0$ ist. Der Modulraum ${}^3M^{st}_{\mathbb{P}^3}(-2, d, d^2-3d+2)$ identifiziert sich daher mit dem offenen Teil im Grassmann-Bündel $\mathbb{G}r(3, q_* p^* \mathcal{O}(d-1))$, der definiert wird durch die 3-dimensionalen Unterräume in $H^0(\mathcal{O}_H(d-1))$, die Linearsysteme ohne Fixkomponenten beschreiben. Die Bündel entsprechen den Linearsystemen ohne Fixpunkte.

Bemerkung 5. 3. Setzt man die exakte Sequenz

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_H(1-d) \longrightarrow 0$$

mit der Standard Auflösung für $\mathcal{O}_H(1-d)$ zusammen, so bekommt man folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{O}(-d) & = & \mathcal{O}(-d) & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1-d) & \longrightarrow & \mathcal{O}(1-d) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \mathcal{O}_H(1-d) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}.$$

Die mittlere Spalte dieses Diagramms liefert eine Auflösung

$$(8) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-d) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 3} \oplus \mathcal{O}(1-d) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

von F durch Summen von Geradenbündeln. Insbesondere folgt aus dieser Auflösung, daß sich die Garben F auf $\mathbb{P}^n$ für beliebig große n fortsetzen lassen, falls $d \geqq 2$ ist.

Theorem 5. 4. *Zu jeder ganzen Zahl $d \geqq 3$ gibt es eine stabile reflexive Garbe F vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^n$, $n \geqq 3$, mit den Chernklassen $c_1 = -2$, $c_2 = d$, $c_3 = d^2 - 3d + 2$. Diese Garben haben homologische Dimension $\leqq 1$ und das Chernpolynom*

$$(9) \qquad c_t(F) = \frac{(1-t)^3\,(1+(1-d)\,t)}{(1-dt)}.$$

Der Modulraum ${}^3M^{st}_{\mathbb{P}^n}(-2, d, d^2-3d+2, \ldots)$ dieser Garben ist irreduzibel, glatt und rational, er enthält für $n > 3$ keine lokal freien Garben.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Theorem 5. 2, man hat zunächst — durch Induktion über n — zu zeigen, daß gilt

$$h^{n-1}(F(d-n))=0,\quad h^{n-1}(F(d-n-1))=1,\quad h^{n-1}(F(d-n-2))=n.$$

Dazu ist die Sequenz (8) nützlich. Ist dies gezeigt, so kann man wie oben einen Reduktionsschnitt durchführen und den Modulraum mit einem offenen Teil eines Grassmann-Bündels identifizieren. Jede dieser Garben ist durch eine Auflösung der Form (8) gegeben, hat also homologische Dimension $\leqq 1$ und das angegebene Chernpolynom (9).

Als nächstes untersuchen wir die stabilen reflexiven Garben vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^3$ mit $c_1=-1$ und extremer dritter Chernklasse. Zur Vorbereitung benötigen wir

Proposition 5. 5. *Sei F eine reflexive Garbe vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^3$ mit $c_1=-2$, $c_2=2$ und $s=h^0(\mathcal{E}xt^1(F,\mathcal{O}))$. Es gelte*

i) $h^0(F)=0$, $h^0(F^\vee(-2))=0$.

ii) $h^0(F_H)=0$, $h^0(F_H^\vee(-2))=0$ *für generische Ebenen $H\subset\mathbb{P}^3$.*

Dann gilt:

1) $2s-2\leqq c_3\leqq 0$.

2) *Für allgemeine Geraden L ist $F_L=\mathcal{O}_L(-1)^{\oplus 2}\oplus\mathcal{O}_L$.*

3) *Ist $c_3=-2$, so besitzt $F^\vee$ die Auflösung*

$$(10)\qquad 0\longrightarrow\mathcal{O}\longrightarrow\mathcal{O}(1)\oplus T(-1)\longrightarrow F^\vee\longrightarrow 0.$$

4) *Ist $c_3=0$, so besitzt F die Auflösungen*

$$(11)\qquad 0\longrightarrow\mathcal{O}(-1)\longrightarrow\mathcal{O}(-1)\oplus T(-2)\longrightarrow F\longrightarrow 0,$$

$$(12)\qquad 0\longrightarrow\mathcal{O}(-2)\longrightarrow\mathcal{O}(-1)^{\oplus 4}\longrightarrow F\longrightarrow 0.$$

Wenn F stabil ist, gilt $F\cong T(-2)$; ist F nicht stabil, so gilt $F\cong\mathcal{O}(-1)\oplus Q$, wobei Q eine reflexive Garbe vom Rang 2 mit einer Singularität ist. Q hat die Auflösung

$$(13)\qquad 0\longrightarrow\mathcal{O}(-1)\longrightarrow T(-2)\longrightarrow Q\longrightarrow 0.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst 2). Sei also H eine Ebene, die ii) erfüllt, $L\subset H$ eine Gerade. Aus der Kohomologiesequenz zu

$$0\longrightarrow F_H(-1)\longrightarrow F_H\longrightarrow F_L\longrightarrow 0$$

erhält man $h^0(F_L)\leqq h^1(F_H(-1))=-\chi(F_H(-1))=1$. Wenn F_L lokal frei ist, muß daher gelten

$$F_L=\mathcal{O}_L(-1)^{\oplus 2}\oplus\mathcal{O}_L.$$

Um 1) zu beweisen, können wir die Abschätzungen aus 4. 1 anwenden und erhalten

$$c_3\leqq 0.$$

Weiter bekommt man — wie im Beweis von 4. 1 —

$$(14) \qquad \chi(F^\vee(-2)) \leqq h^2(F^\vee(-2)) \leqq \sum_{l \geqq 1} h^1(F_H^\vee(l-2)) = \sum_{l \leqq -2} h^1(F_H(l)).$$

Nach Theorem 1. 1 ii) gilt

$$h^1(F_H(l)) \leqq h^1(F_H(l+1)) \quad \text{für} \quad l \leqq -2.$$

Wir zeigen zunächst, daß $h^1(F_H(-2))=0$ ist. Wäre dies nicht so, so müßte wegen

$$h^1(F_H(-2)) \leqq h^1(F_H(-1)) = 1$$

$h^1(F_H(-2))=1$ gelten. Für F_H erhielte man dann folgende Kohomologie

$$\begin{array}{ccc|l} & & & \uparrow q \\ 2 & 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 & h^q(F_H(p)) \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & \to p \end{array} \quad .$$

Aus dem Satz von Beilinson [11] bekäme man dann F_H durch eine Extension

$$(15) \qquad 0 \longrightarrow Q \longrightarrow F_H \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2} \longrightarrow 0,$$

wobei die Garbe Q die Auflösung

$$(16) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow T_H(-2) \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

hätte. Q wäre also die Idealgarbe eines Punktes in H, also nicht reflexiv. Daher kann die Sequenz (15) nicht exakt sein, es folgt $h^1(F_H(-2))=0$. Nach (14) gilt

$$\chi(F^\vee(-2)) \leqq 0.$$

Aus dem Satz von Riemann-Roch bekommt man also

$$\frac{1}{2}(2s-2-c_3) \leqq 0.$$

Damit ist 1) bewiesen.

Sei nun $c_3=-2$. Nach Lemma 3. 4 und 3. 5 besteht das Spektrum k_F von F nur aus der Zahl 0. Man bekommt also folgende Kohomologie für F:

$$(17) \qquad \begin{array}{cccc|l} c+1 & 0 & 0 & 0 & \uparrow q \\ c & 0 & 0 & 0 & h^q(F(p)) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & & \to p \end{array} \quad .$$

Um die Zahl c zu bestimmen, betrachten wir die Einschränkung von F auf eine generische Ebene H. Die zugehörige Kohomologiesequenz liefert

$$c+1 = h^3(F(-3)) = h^2(F_H(-2)) = 1,$$

also $c=0$.

Wir definieren die reflexive Garbe $Q^\vee(-1)$ durch

$$0 \longrightarrow Q^\vee(-1) \longrightarrow \Omega^1(1) \longrightarrow \mathfrak{m}_x \longrightarrow 0. \tag{18}$$

Dann ist F durch eine Extension der Form

$$0 \longrightarrow Q^\vee(-1) \longrightarrow F \longrightarrow \mathfrak{m}_x(-1) \longrightarrow 0 \tag{19}$$

gegeben. Weil $c_3 = -2$ ist, ist $s = 0$, also F lokal frei und wir erhalten aus (19) die duale Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(1) \longrightarrow F^\vee \longrightarrow Q(1) \longrightarrow 0. \tag{20}$$

Die zu (18) duale Sequenz ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow T(-1) \longrightarrow Q(1) \longrightarrow 0. \tag{21}$$

Mit (20) und (21) bekommt man schließlich das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathcal{O} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{O} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}(1) \oplus T(-1) \arrow[r] \arrow[d] & T(-1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(1) \arrow[r] & F^\vee \arrow[r] \arrow[d] & Q(1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}.$$

$F^\vee$ ist also gegeben durch

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(1) \oplus T(-1) \longrightarrow F^\vee \longrightarrow 0. \tag{22}$$

Damit ist auch die Aussage 3) bewiesen.

Sei schließlich $c_3 = 0$. Das Spektrum von F besteht dann aus der Zahl -1. Man bekommt folgende Kohomologie

$$\begin{array}{cccc|l} & & & & \uparrow q \\ c & 0 & 0 & 0 & \\ c & 1 & 0 & 0 & \qquad h^q(F(p)) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ \hline & & & & \rightarrow \end{array} \tag{23}$$

Für die Zahl c gilt

$$c = h^3(F(-3)) \leqq h^2(F_H(-2)) = 1.$$

Ist $c=0$, so bekommt man $F \cong T(-2)$. Ist $c=1$, F also nicht stabil, so ist F nach dem Satz von Beilinson gegeben durch

$$(24) \qquad 0 \longrightarrow Q \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow 0,$$

wobei die reflexive Garbe Q durch

$$(25) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow T(-2) \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

definiert wird. Aus (24) und (25) erhält man die Auflösung

$$(26) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \oplus T(-2) \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Da wegen $h^1(Q(1))=0$ die Sequenz (24) spaltet, sind damit alle Aussagen von Proposition 5. 5 bewiesen.

Corollar 5. 6. *Sei F eine reflexive Garbe vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^n$, $n \geqq 3$, mit $c_1=-2$, $c_2=2$ und $c_3=0$. Es gelte*

i) $h^0(F)=0$, $h^0(F^\vee(-2))=0$,

ii) $h^0(F_E)=0$, $h^0(F_E^\vee(-2))=0$ *für generische Ebenen $E \subset \mathbb{P}^n$.*

Dann hat F die Auflösung

$$(27) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 4} \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Beweis. Für $n=3$ ist nichts mehr zu beweisen. Durch Einschränkung auf generische Hyperebenen bekommt man induktiv

$$h^1(F(*)) = \cdots = h^{n-2}(F(*))=0,$$

$h^0(F(1))=4$, $h^{n-1}(F(-n+1))=1$ und

$$h^{n-1}(F(l))=0 \quad \text{für} \quad l > -n+1.$$

Aus dem Satz von Beilinson — angewendet auf $F(1)$ — erhält man dann die gewünschte Auflösung.

Bevor wir die extremen Garben mit $c_1=-1$ und $c_1=0$ klassifizieren, leiten wir eine einfache Bedingung her, die es erlaubt, auf die Irreduzibilität gewisser Modulräume zu schließen.

Proposition 5. 7. *Sei $M = {}^r M_{\mathbb{P}^n}^{st}(c_1, \ldots, c_n)$ der Modulraum der stabilen reflexiven Garben F vom Rang r auf $\mathbb{P}^n$ mit den Chernklassen $c_i(F)=c_i$. Wenn es lokal freie Garben E_0, E_1 gibt, so daß jede der Garben F eine Auflösung der Form*

$$(28) \qquad 0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{f} E_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

hat, ist der Modulraum M irreduzibel.

Beweis. Sei $\tilde{M} \subset V := \mathrm{Hom}(E_1, E_0)$ die Menge aller Homomorphismen

$$f\colon E_1 \longrightarrow E_0$$

deren Cokern $F_f := \mathrm{Coker} f$ eine stabile reflexive Garbe vom Rang r auf $\mathbb{P}^n$ ist. Sei $p\colon V \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ die Projektion,

$$0 \longrightarrow p^* E_1 \xrightarrow{\Phi} p^* E_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

die universelle Sequenz auf $V \times \mathbb{P}^n$, deren Einschränkung auf die Faser über $f \in V$ die Sequenz

$$E_1 \xrightarrow{f} E_0 \longrightarrow F_f \longrightarrow 0$$

ergibt. Die Garbe F_f ist genau dann reflexiv vom Rang r, wenn

$$\Lambda^{n_1} f\colon \Lambda^{n_1} E_1 \longrightarrow \Lambda^{n_1} E_0 \qquad (n_1 = \mathrm{rg}\, E_1)$$

nur Nullstellen in Codimension $\geqq 3$ hat [9]. Dies ist eine offene Bedingung an $f \in V$, denn das Unterschema

$$Z := (\Lambda^{n_1} \Phi)_0 \subset V \times \mathbb{P}^n$$

hat als Schema über V die Fasern

$$Z_f = (\Lambda^{n_1} f)_0,$$

deren Dimension $\dim(\Lambda^{n_1} f)_0$ also halbstetig nach oben ist. Sei $U \subset V$ der offene Teil aller Homomorphismen $f \in V$, für die $F_f = \mathrm{Coker} f$ reflexiv vom Rang r ist. Die Garbe $F_{U \times P^n}$ ist platt über U, weil sie auf jeder Faser $\{f\} \times \mathbb{P}^n$ das von f unabhängige Hilbertpolynom

$$\chi(F_f(l)) = \chi(E_0(l)) - \chi(E_1(l))$$

besitzt [3]. Nach Maruyama [7] ist die Menge $\tilde{M} \subset U$ aller Homomorphismen f, deren Cokern F_f stabil ist, offen in U. Die Familie $F_{\tilde{M} \times P^n}$ definiert nun einen Morphismus [8]

$$\psi\colon \tilde{M} \longrightarrow M$$

in den (groben) Modulraum M. ψ ist nach Voraussetzung surjektiv. Als Bild des offenen Unterschemas $\tilde{M} \subset V$ ist M daher irreduzibel.

Nach diesen Vorbereitungen können wir die stabilen reflexiven Garben vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^3$ mit $c_1 = -1$ und extremen c_3 untersuchen.

Theorem 5. 8. *Zu jeder ganzen Zahl $d \geqq 2$ gibt es eine stabile reflexive Garbe F vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^3$ mit den Chernklassen $c_1 = -1$, $c_2 = d$, $c_3 = d^2 - 2d + 2$. Für $d \geqq 2$ hat jede dieser Garben eine Auflösung der Form*

$$(29) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-d) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 4} \oplus \mathcal{O}(1-d) \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Der Modulraum ${}^3M^{st}_{\mathbb{P}^3}(-1, d, d^2 - 2d + 2)$ dieser Garben ist irreduzibel. Die lokal freien Garben liegen in diesem Modulraum dicht.

Beweis. Aus Bemerkung 4. 2 bekommt man für $d \geqq 5$

$$h^2(F(d-3))=0, \quad h^2(F(d-4))=1, \quad h^2(F(d-5))=3.$$

Dies gilt auch noch für $d=3$ und $d=4$. Ist nämlich $d=3$, so folgt nach 4. 2 $h^2(F)=0$, $h^2(F(-1)) \leqq 1$, also $k_F=(-2,-1,-1)$. Ist $d=4$, so erhält man aus 4. 2 $h^2(F)=1$ und $h^2(F(-1)) \leqq 3$, also $k_F=(-3,-2,-1,-1)$. Sei nun $d=2$. Das Spektrum von F ist dann von der Form $(-1,-1)$ oder $(-2,0)$. Der Fall $(-2,0)$ kommt nicht vor, da man sonst nach einem Reduktionsschritt mit einer instabilen Ebene der Ordnung 2 eine Garbe F' erhalten würde, für die gelten müßte $c_1(F')=-2$, $c_2(F')=1$, $h^0(F'_H)=0$, $h^0(F'_H(-2))=0$ für generische Ebenen $H \subset \mathbb{P}^3$. Es würde folgen $1=\chi(F'_H)=-h^1(F'_H) \leqq 0$, was nicht geht. Für $d=2$ liegt also stets das Spektrum $(-1,-1)$ vor und man erhält

$$h^2(F(-1))=0, \quad h^2(F(-2))=2, \quad h^2(F(-3))=3.$$

Man bekommt daher für alle $d \geqq 2$ eine instabile Ebene der Ordnung $d-1$. Der Reduktionsschritt führt auf die exakte Sequenz.

$$(30) \qquad 0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{I}_{Z,H}(1-d) \longrightarrow 0,$$

wobei F' eine reflexive Garbe vom Rang 3 mit

$$c_t(F')=1-2t+2t^2+2l(\mathcal{O}_Z)\,t^3$$

ist. Diese Garben haben wir in 5. 5. beschrieben; es gilt $l(\mathcal{O}_Z)=0$, also $Z=\phi$ und F' hat die Auflösung

$$(12) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 4} \longrightarrow F' \longrightarrow 0.$$

Zusammen mit der Standard Auflösung von $\mathcal{O}_H(1-d)$ bekommt man so folgendes Diagramm

$$(31) \qquad \begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-2) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-d) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-d) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-1)^{\oplus 4} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-1)^{\oplus 4} \oplus \mathcal{O}(1-d) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(1-d) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_H(1-d) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}.$$

Die mittlere Spalte liefert die behauptete Sequenz (29). Die Irreduzibilität von ${}^3M^{st}_{\mathbb{P}^3}(-1, d, d^2-2d+2)$ folgt aus Proposition 5. 7. Um zu sehen, daß dieser Raum nicht leer ist, dualisieren wir (3) und erhalten — nach Vertwisten mit $\mathcal{O}(-1)$ —

$$(32) \quad 0 \to F^{\vee}(-1) \to F'^{\vee}(-1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_H(d-1) \to \mathcal{E}xt^1(F, \mathcal{O}(-1)) \to \mathcal{E}xt^1(F', \mathcal{O}(-1)) \to 0.$$

Die Morphismen

$$\alpha : F'^{\vee}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_H(d-1)$$

faktorisieren über $F'^{\vee}(-1)_H$. Ist F' lokal frei oder $\mathrm{Sing}(F') \cap H = \emptyset$, so gilt

$$F'^{\vee}(-1)_H = \Omega_H^1(1) \oplus \mathcal{O}_H.$$

Wählt man also einen Epimorphismus

$$\alpha_H : \Omega_H^1(1) \oplus \mathcal{O}_H \longrightarrow \mathcal{O}_H(d-1),$$

so daß $H^0(\alpha)$ injektiv ist, so definiert die Zusammensetzung

$$\alpha : F'^{\vee}(-1) \xrightarrow{\mathrm{res}_H} F'^{\vee}(-1)_H \longrightarrow \mathcal{O}_H(d-1)$$

durch $F_\alpha := (\mathrm{Ker}\,\alpha)^{\vee}(-1)$ eine stabile reflexive Garbe vom Rang 3 mit den gewünschten Chernklassen. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung 5. 9. Wählt man mit den Bezeichnungen von 5. 8 für $F'^{\vee}(-1)$ das Bündel $\Omega^1(1)$ und α_H surjektiv, so ist F_α lokal frei. Wählt man für $F'^{\vee}(-1)$ die Garbe $Q^{\vee}(-1) \oplus \mathcal{O}$, so ist — für surjektives α_H mit $\mathrm{Ker}\, H^0(\alpha_H) = 0$ — F_α lokal frei außerhalb der eindeutig bestimmten Singularität $x \notin H$ von Q.

Theorem 5. 10. *Zu jeder ganzen Zahl $d \geqq 2$ gibt es eine stabile reflexive Garbe F vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^n$, $n \geqq 3$, mit den Chernklassen $c_1 = -1$, $c_2 = d$, $c_3 = d^2 - 2d + 2$. Diese Garben haben homologische Dimension $\leqq 1$ und das Chernpolynom*

$$c_t(F) = \frac{(1-t)^4\,(1+(1-d)\,t)}{(1-2t)\,(1-dt)}.$$

Der Modulraum ${}^3M_{\mathbb{P}^n}^{st}(-1, d, d^2-2d+2, \ldots)$ dieser Garben ist irreduzibel. Er enthält für $n > 3$ keine lokal freien Garben.

Beweis. Man zeigt — durch Induktion über n —, daß für $d \geqq 2$ gilt

$$h^1(F(*)) = h^2(F(*)) = \cdots = h^{n-2}(F(*)) = 0,$$

$h^{n-1}(F(l)) = 0$ für $l \geqq d-n$, sowie

$$h^{n-1}(F(d-n-1)) = \begin{cases} 1 & \text{für } d \geqq 3 \\ 2 & \text{für } d = 2 \end{cases}, \quad h^{n-1}(F(d-n-2)) = \begin{cases} n & \text{für } d \geqq 3, \\ 2n-3 & \text{für } d = 2. \end{cases}$$

Daher kann man für $d \geqq 3$ wie in Theorem 5. 8 einen Reduktionsschritt durchführen und erhält eine exakte Sequenz

$$(33) \qquad 0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{J}_{Z,H}(1-d) \longrightarrow 0,$$

wobei F' eine der in Corollar 5. 6 beschriebenen Garben ist. Es folgt $Z = \emptyset$ und wie in 5. 8 ergibt sich für F die Auflösung

$$(34) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-d) \xrightarrow{s} \mathcal{O}(-1)^{\oplus 4} \oplus \mathcal{O}(1-d) \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

falls $d \geqq 3$ ist. Ist $d = 2$, so erhält man — mit Hilfe des Satzes von Beilinson — für F die Auflösung

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 2n-3} \longrightarrow T(-2)^{\oplus 2} \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Setzt man dies mit der Standard Auflösung von $T(-2)$ zusammen; so bekommt man auch hier die Auflösung

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 5} \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Indem man für s die Fortsetzung eines Monomorphismus

$$s_{\mathbb{P}^3}: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-d) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)^{\oplus 4} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1-d)$$

nimmt, der eine der Garben aus 5. 8 beschreibt, sieht man, daß der Modulraum ${}^3M^{st}_{\mathbb{P}^n}(-1, d, d^2-2d+2, \ldots)$ für $d \geqq 2$ nicht leer ist. Nach Proposition 5. 7 ist er irreduzibel. Für $n > 3$ enthält er keine lokal freien Garben, da die vierte Chernklasse $c_4(F) = d^3 + 1 \neq 0$ ist.

Als letztes untersuchen wir die stabilen reflexiven Garben F vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^n$ mit $c_1 = 0$ und extremer dritter Chernklasse. Diejenigen dieser Garben, die auf einer generischen Ebene $E \subset \mathbb{P}^n$ nicht stabil sind, sind in [2] klassifiziert worden. Wir betrachten daher nur solche Garben F, deren Einschränkung F_E auf generische Ebenen stabil ist. Aus Theorem 4. 1 erhält man dann die Ungleichungen

$$c_2 \geqq 3, \quad c_3 \leqq c_2^2 - 3c_2 + 6.$$

Theorem 5. 11. *Zu jeder ganzen Zahl $d \geqq 5$ gibt es eine stabile reflexive Garbe vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^3$ mit den Chernklassen $c_1 = 0$, $c_2 = d$, $c_3 = d^2 - 3d + 6$. Jede dieser Garben hat eine Auflösung der Form*

$$(35) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(1-d) \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 5} \oplus \mathcal{O}(2-d) \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

Der Modulraum ${}^3M^{st}_{\mathbb{P}^3}(0, d, d^2-3d+6)$ dieser Garben ist irreduzibel. Die lokal freien Garben liegen in diesem Modulraum dicht.

Beweis. Nach [2] ist die Einschränkung von F auf eine generische Ebene stabil, $c_3 = c_2^2 - 3c_2 + 6$ also extrem. Aus Bemerkung 4. 2 erhält man für $d \geqq 6$

$$h^2(F(d-4)) = 0, \quad h^2(F(d-5)) = 1, \quad h^2(F(d-6)) = 3.$$

Dies gilt auch für $d = 5$, da in diesem Fall das Spektrum von F die Form

$$(-3, -2, -1, -1, -1, 0)$$

haben muß. Es existiert daher eine instabile Ebene $H \subset \mathbb{P}^3$ der Ordnung $r = d - 2$. Der Reduktionsschritt liefert eine exakte Sequenz

$$(36) \qquad 0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{J}_{Z,H}(2-d) \longrightarrow 0.$$

Die Garbe F' ist reflexiv, stabil und hat das Chernpolynom

$$c_t(F') = 1 - t + 2t^2 + (2 + 2l(\mathcal{O}_Z))\, t^3.$$

Da F' stabil ist, gilt $c_3(F') \leqq 2$, also $Z = \emptyset$ und $c_3(F') = 2$. Diese Garben haben wir in Theorem 5. 8 klassifiziert, sie haben die Auflösung

$$(37) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}(-2)^{\oplus 2} \longrightarrow \mathcal{O}(-1)^{\oplus 5} \longrightarrow F' \longrightarrow 0.$$

Wie in 5.8 erhält man mit Hilfe der Standard Auflösung von $\mathcal{O}_H(2-d)$ hieraus das folgende Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-2)^{\oplus 2} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-2)^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}(1-d) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(1-d) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(-1)^{\oplus 5} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-1)^{\oplus 5} \oplus \mathcal{O}(2-d) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(2-d) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_H(2-d) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\tag{38}
$$

Die mittlere Spalte liefert die gesuchte Auflösung für F. Aus Proposition 5.7 folgt die Irreduzibilität. Um die Existenz solcher Garben nachzuweisen, setzen wir die Sequenzen (36) und (30) zusammen zu folgendem Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & F'' \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & R \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] & \mathcal{O}_H(2-d) \arrow[r] & 0 \\
 & \mathcal{O}_{H'}(-1) \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

Die Garbe R ist gegeben als Extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{H'}(-1) \longrightarrow R \longrightarrow \mathcal{O}_H(2-d) \longrightarrow 0. \tag{39}$$

Wir wählen nun $F'' = T(-2)$ und $R = \mathcal{O}_{H'}(-1) \oplus \mathcal{O}_H(2-d)$, wobei die Ebenen H' und H sich in der Geraden $L = H' \cap H$ schneiden sollen, und versuchen F als Extension

$$0 \longrightarrow T(-2) \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_{H'}(-1) \oplus \mathcal{O}_H(2-d) \longrightarrow 0 \tag{40}$$

zu konstruieren. Dualisiert man die Sequenz, so entsteht

$$0 \longrightarrow F^{\vee} \longrightarrow \Omega(2) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{H'}(2) \oplus \mathcal{O}_H(d-1) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(F, \mathcal{O}) \longrightarrow 0,$$

Es genügt nun, einen Morphismus

$$\alpha\colon \Omega(2) \longrightarrow \mathcal{O}_{H'}(2) \oplus \mathcal{O}_H(d-1)$$

zu konstruieren, dessen Cokern endlichen Träger hat und für den $H^0(\alpha)$ injektiv ist. Der Morphismus α ist gegeben durch zwei Morphismen

$$\alpha_{H'}\colon \Omega(2)_{H'} \longrightarrow \mathcal{O}_{H'}(2), \qquad \alpha_H\colon \Omega(2)_H \longrightarrow \mathcal{O}_H(d-1).$$

Es ist nicht schwierig zu sehen, daß man die Morphismen $\alpha_{H'}$ und α_H so wählen kann, daß der induzierte Morphismus α surjektiv wird. $(\operatorname{Ker}\alpha)^\vee$ ist dann lokal frei. $H^0(\alpha)$ ist sicher dann injektiv, wenn $H^0(\alpha_{H'})$ es ist. Es genügt also, ein $\alpha_{H'}$ zu konstruieren (nicht notwendig epimorph) mit $\operatorname{Ker} H^0(\alpha_{H'})=0$. Dazu führen wir auf H' die homogenen Koordinaten $(x:y:z)$ ein. Identifiziert man $\Omega_{H'}(2)$ mit $T_{H'}(-1)$. so wird $\alpha_{H'}|_{T_{H'}(-1)}$ gegeben durch drei Formen $f_1, f_2, f_3 \in H^0(\mathcal{O}_{H'}(2))$ mit

$$x f_1(x,y,z) + y f_2(x,y,z) + z f_3(x,y,z) = 0.$$

Wir wählen $f_1 = yz$, $f_2 = xz$, $f_3 = -2xy$. Auf dem Summanden $\mathcal{O}_{H'}(1)$ wird $\alpha_{H'}|\mathcal{O}_{H'}(1)$ gegeben durch eine Linearform $\lambda \in H^0(\mathcal{O}_{H'}(1))$. Wir setzen

$$\lambda = x+y+z.$$

Dann liegen die Formen

$$yz,\ xz,\ -2xy,\ x^2+xy+xz,\ xy+y^2+yz,\ xz+yz+z^2$$

im Bild von $H^0(\alpha_{H'})$, d.h. $H^0(\alpha_{H'})$ ist isomorph. Damit ist die Existenz von Morphismen

$$\alpha\colon \Omega(2) \longrightarrow \mathcal{O}_{H'}(2) \oplus \mathcal{O}_H(d-1),$$

die stabile reflexive Garben mit den gewünschten Chernklassen definieren, gezeigt. Theorem 5. 11 ist bewiesen.

Bemerkung 5. 12. Wir werden die Sonderfälle der stabilen reflexiven Garben vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^3$ mit $c_1 = 0$ und $c_2 = 3$, 4 an anderer Stelle untersuchen.

Theorem 5. 13. *Zu jeder ganzen Zahl $d \geqq 5$ gibt es eine stabile reflexive Garbe F vom Rang 3 auf $\mathbb{P}^n$, $n \geqq 3$, mit den Chernklassen $c_1 = 0$, $c_2 = d$, $c_3 = d^2 - 3d + 6$. Diese Garben haben homologische Dimension $\leqq 1$ und das Chernpolynom*

$$c_t(F) = \frac{(1-t)^5\,(1+(2-d)\,t)}{(1-2t)^2\,(1+(1-d)\,t)}\,.$$

Der Modulraum ${}^3M^{st}_{\mathbb{P}^n}(0, d, d^2-3d+6, \ldots)$ dieser Garben ist irreduzibel. Er enthält für $n > 3$ keine lokal freien Garben.

Beweis. Der Beweis läuft analog zum Beweis von Theorem 5. 10. Man zeigt

$$h^1(F(*)) = h^2(F(*)) = \cdots = h^{n-2}(F(*)) = 0$$

und $h^{n-1}(F(l)) = 0$ für $l \geqq d-n-1$,

$$h^{n-1}(F(d-n-2)) = 1, \quad h^{n-1}(F(d-n-3)) = n;$$

es existiert also eine instabile Hyperebene der Ordnung $d-2$. Der Reduktionsschritt führt auf Garben, die in 5. 10 klassifiziert worden sind. Man bekommt für $n > 3$ keine lokal freien Garben, weil $c_4(F) = d^3 - 4d^2 + 7d + 3 > 0$ ist.

Bemerkung 5. 14. Die angegebenen Beispiele zeigen, daß der Verschwindungssatz 2. 3 für stabile reflexive Garben vom Rang 3 auf $\mathbb{P}_k^n$ optimal ist, falls $\operatorname{char} k = 0$ ist.

Literatur

[1] *W. Barth* und *G. Elencwajg*, Concernant la cohomologie des fibrés algébriques stables sur $\mathbb{P}_n(C)$, Lecture notes in Math. **683,** Berlin-Heidelberg-New York 1978, 1—24.

[2] *L. Ein, R. Hartshorne* und *H. Vogelaar*, Restriction theorems for stable rank 3 vector bundles on $\mathbb{P}^n$, Math. Ann. **259** (1982), 541—569.

[3] *R. Hartshorne*, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math. **52,** Berlin-Heidelberg-New York 1977.

[4] *R. Hartshorne*, Stable reflexive sheaves, Math. Ann. **254** (1980), 121—176.

[5] *R. Hartshorne*, Stable reflexive sheaves. II, Invent. math. **66** (1982), 165—190.

[6] *R. Hartshorne* und *A. Hirschowitz*, Cohomology of a general instanton bundle, erscheint in Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (1982).

[7] *M. Maruyama*, Openess of a family of torsion free sheaves, J. Math. Kyoto Univ. **16** (1976), 627—637.

[8] *M. Maruyama*, Moduli of stable sheaves. I, J. Math. Kyoto Univ. **17** (1977), 91—126.

[9] *C. Okonek*, Reflexive Garben auf $\mathbb{P}^4$, Math. Ann. **260** (1982), 211—237.

[10] *C. Okonek*, Moduli extremer reflexiver Garben auf $\mathbb{P}^n$, J. reine angew. Math. **338** (1983), 183—194.

[11] *C. Okonek, M. Schneider* und *H. Spindler*, Vector bundles on complex projective spaces, Boston 1980.

[12] *M. Schneider*, Chernklassen semi-stabiler Vektorraumbündel vom Rang 3 auf dem komplex-projektiven Raum, J. reine angew. Math. **315** (1980), 211—220.

[13] *M. Schneider*, Einschränkung stabiler Vektorraumbündel vom Rang 3 auf Hyperebenen des projektiven Raumes, J. reine angew. Math. **323** (1981), 177—192.

[14] *H. Spindler*, Der Satz von Grauert-Mülich für beliebige semistabile holomorphe Vektorbündel über dem n-dimensionalen komplex-projektiven Raum, Math. Ann. **243** (1979), 131—141.

[15] *H. Spindler*, Ein Satz über die Einschränkung von r-Bündeln auf $\mathbb{P}^n$ mit $c_1 = 0$ auf Hyperebenen, J. reine angew. Math. **327** (1981), 94—118.

[16] *H. Spindler*, Die Modulräume stabiler 3-Bündel auf $\mathbb{P}_3$ mit den Chernklassen $c_1 = 0$, $c_3 = c_2^2 - c_2$, Math. Ann. **256** (1981), 133—143.

[17] *H. Spindler*, Holomorphe Vektorbündel auf $\mathbb{P}_n$ mit trivialem Spaltungstyp, Habilitationsschrift, Göttingen 1981.

Universität Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3—5, D-3400 Göttingen

Eingegangen 28. Juni 1982